Департамент освіти й науки Запорізької облдержадміністрації
Запорізький обласний інститут післядипломної педагогічної освіти
ІІ етап Всеукраїнської олімпіади з математики 2018-2019 н.р.

11 клас

1. *Розв'яжіть нерівність* $\left||x-1|-5\right|<3-2x$.

Розв'язання. Ліва частина нерівності невід'ємна, тому права частина більше нуля, тобто $3-2x>0$. $\left[\begin{array}{l} x\in[1;1{,}5)\Rightarrow|x-6|<3-2x \\ x<1\Rightarrow|x+4|<3-2x \end{array}\right.$ $\begin{cases} x\in[1;1{,}5), \\ 2x-3<x-6\Rightarrow \\ x-6<3-2x \end{cases}\begin{cases} x\in[1;1{,}5), \\ x<-3 \\ x<3 \end{cases}$

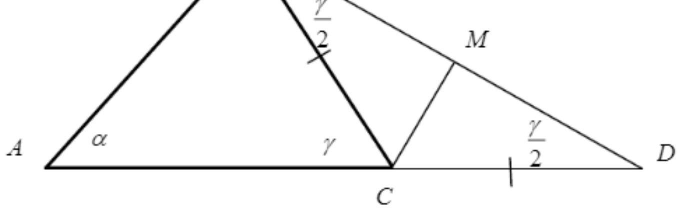
$\begin{cases} x<1, \\ 2x-3<x+4\Rightarrow \\ x+4<3-2x \end{cases}\begin{cases} x<1, \\ x<7 \\ x<-\frac{1}{3} \end{cases}$ Відповідь: $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$.

2. *На виробництво з фарбування тарілок прийшло замовлення на виготовлення партії з 45 тарілок одного кольору. На складі є 13 червоних, 15 жовтих і 17 зелених тарілок. Виробництво має фарбувальний верстат, що може фарбувати тарілки в один з трьох кольорів (червоний, жовтий, зелений). Верстат працює за такими правилами: фарбувати можна тільки по дві тарілки; фарбування починається тільки якщо тарілки різнокольорові; колір фарбування не співпадає з кольорами завантажених тарілок (наприклад, червона і жовта стають зеленими). Чи можна виконати замовлення? Відповідь обґрунтуйте.*

Позначимо кольори тарілок: червоний = 0, жовтий = 1, зелений = 2.
Тоді при перефарбуванні отримаємо $0+1\to2+2$, $1+2\to0+0$, $0+2\to1+1$.
Неважко помітити, що при фарбуванні незмінною є остача від ділення на 3 суми кольорів всіх тарілок. Насправді, $0+1(\textit{остача}=1)\to2+2=4(\textit{остача}=1)$,
$1+2(\textit{остача}=0)\to0+0=0(\textit{остача}=0)$, $0+2(\textit{остача}=2)\to1+1=2(\textit{остача}=2)$.
Це означає, що при будь-яких перефарбуваннях остача від ділення суми всіх кольорів на 3 не змінюється. Початкова сума кольорів була рівна 13·0+15·1+17·2=49 (остача 1).
У випадку, якби всі тарілки стали одного кольору, остача би дорівнювала 0 (бо 45·N завжди ділиться на 3 націло), а значить, такого бути не може. Відповідь: Завдання виконати неможливо.

3. *На продовжені найбільшої сторони AC трикутника ABC відкладено відрізок CD, причому $CD=BC$. Доведіть, що $\angle ABD$ є тупим.*

Доведення:



1) Позначимо кути трикутника ABC як α,β,γ відповідно. Тоді за властивістю кутів має місце рівність: $\alpha+\beta+\gamma=180^\circ$.

2) В ΔBCD проведемо бісектрису CM. Оскільки $CD = BC$, то ΔBCD є рівнобедреним з основою BD. Тому $\angle CBD = \angle CDB$. З іншого боку, за властивістю зовнішніх кутів ΔBCD має місце рівність:

$$\angle CBD + \angle CDB = \angle ACB = \gamma,$$

Звідки $\angle CBD = \angle CDB = \frac{\gamma}{2}$. І тому $\angle ABD = \beta + \frac{\gamma}{2}$.

3) За умовою β-найбільший кут трикутника ABC. Тому $\beta > \alpha$, звідки: $\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) > \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)$.

4) Попереднє подамо у вигляді: $\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) + \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = 180°$.

Тоді, з урахуванням , має місце нерівність $2\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) > 180°$. Звідки $\beta + \frac{\gamma}{2} > 90°$.

З цього випливає, що $\angle ABD$ є тупим. **Відповідь:** $\angle ABD$ є тупим

4. *За означенням $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$, n факторіал – це число, що дорівнює добутку всіх натуральних чисел від 1 до n. Наприклад $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Який множник потрібно викреслити в добутку $1! \cdot 2! \cdot 3! \ldots \cdot 19! \cdot 20! = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$ для того, щоб отримане після викреслювання число стало квадратом деякого натурального числа?*

<u>Розв'язання</u>. Помітимо, що $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19! \cdot 20! = (1! \cdot 2!) \cdot (3! \cdot 4!) \cdot \ldots \cdot (19! \cdot 20!) =$

$$= (1! \cdot 1! \cdot 2) \cdot (3! \cdot 3! \cdot 4) \cdot \ldots \cdot (19! \cdot 19! \cdot 20) =$$

$$= (1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \cdot 6 \cdot (7!)^2 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot 20 =$$

$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot (7!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16 \cdot 18 \cdot 20) =$$

$$= (1!)^2 \cdot (3!)^2 \cdot (5!)^2 \cdot (7!)^2 \cdot \ldots \cdot (19!)^2 \cdot 2^{10} \cdot \left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 2^3 \cdot 3^2 \cdot 2 \cdot 5\right) =$$

$$= \left(2^5 \cdot 1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!\right)^2 \cdot \left(1 \cdot 2^8 \cdot 7 \cdot 3^4 \cdot 5^2\right) = \left(2^9 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 19!\right)^2 \cdot 7$$

Таким чином, якщовикреслити 7, то залишається число, що є квадратом.

5. *Знайдіть усі функції $f: R \to R$ такі, що для всіх дійсних x та y виконується рівність $f(x+y) + x^2 + y^2 = f(x^2 + y^2) + x + y$.*

<u>Розв'язання</u>. $F(x) = x + c$, де c- довільне число. Покладемо $x = -t$, $y = t$, одержимо: $f(0) + 2t^2 = f(2t^2)$. Звідси $f(x) = x + c$, для деякої константи c і будь-якого дійсного $x \geq 0$. Отже, $f(x+y) + x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + c + x + y$ для будь-яких дійсних x та y. Звідси одержуємо, що $f(x) = x + c$ для всіх $x \in R$. Перевірка показує, що всі такі функції задовольняють умову задачі.

На виконання роботи відводиться 4 години

Кожне завдання оцінюється в 7 балів

Використання калькуляторів не дозволяється